f ist **stetig** in $x_0 \in D$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall (a_n)_{n \geq 1} \subset D$ mit $\lim a_n = x_0$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$$

Satz $f, g : D \to \mathbb{R}$ beide stetig in $x_0 \in D$. Dann

① fg, λf, $f \pm g$ sind stetig in x_0

② $\frac{f}{g} : D \setminus \{x \in D \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ ist stetig in x_0 (falls $g(x_0) \neq 0$)

③ $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ sind stetig in x_0.

Bsp. 1) $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, Poly. sind auf <u>ganz $\mathbb{R}$ stetig</u>

2) $\frac{P(x)}{Q(x)}$, (P, Q Polynome) ist auf <u>$\mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots x_m\}$ stetig</u>, wobei $\{x_1, \dots x_m\}$ = Nullstellen von $Q(x)$

3) $g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ ist

stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. <u>In $x_0 = 0$ ist g nicht stetig</u>.

4) $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Indikatorfunktion der Rationale Zahlen ist <u>in keinem Punkt stetig</u>.

//

Satz (Zwischenwertsatz) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Interval, $f : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es (mindestens) ein c zwischen a und b mit

$$f(c) = y$$

Beweis: (Idee)

Wir werden 2 monotone Folgen definieren so dass

$$a = a_1 \le a_2 \cdots \le a_n < b_n \le b_{n-1} \cdots \le b_1 = b$$

$(a_n)_{n\ge 1}$ mon $\nearrow$, $(b_n)_{n \ge 1}$ mon $\searrow$.

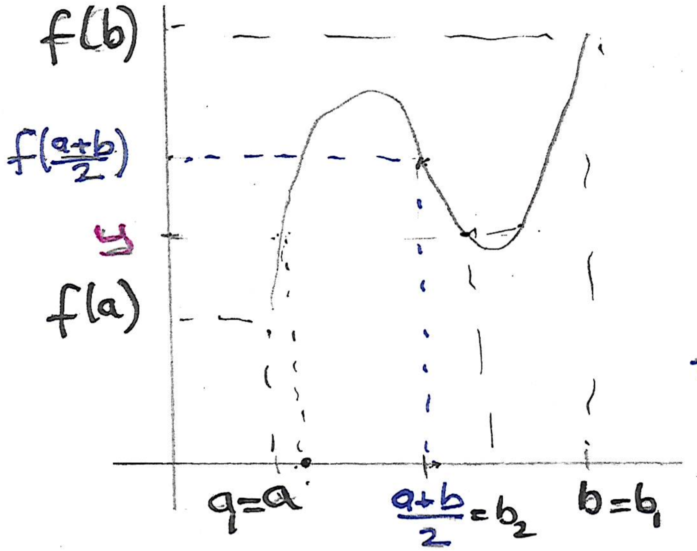
Beide Folgen sind beschränkt, und $\lim a_n = \lim b_n =: c$ und $f(a_n) < y \le f(b_n)$.

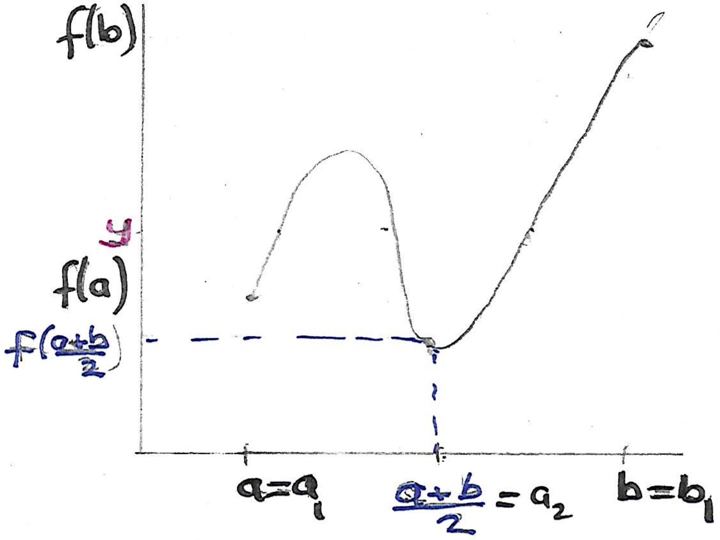
Dann

$$\lim f(a_n) \le y \le \lim f(b_n)$$

$$\underset{\text{Stetigkeit der Funk. } f}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{f(\lim a_n)}_{= f(c)} \le y \le \underbrace{f(\lim b_n)}_{= f(c)}$$

$$\Rightarrow \quad y = f(c).$$





Fall 1: $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq y$

$a_1 = a$, $b_1 = b$

$a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{a_1+b_1}{2}$

Fall 2: $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < y$

$a_1 = a$, $b_1 = b$

$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{a+b}{2}$, $b_2 = b_1$

Auf jedem Fall gilt

① $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1$

② $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$

③ $f(a_2) < y \leq f(b_2)$

Wir iterieren jetzt dieses Verfahren.

Wir nehmen an dass wir Folgen definiert haben nach $(k-1)$ Schritten mit

① $a_1 = a \leq a_2 \dots \leq a_k < b_k \leq b_{k-1} \leq \dots \leq b_1 = b$

② $b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2^2} = \dots = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$

③ $f(a_k) < y \leq f(b_k)$

Nun untersuchen wir wieder

2 Fälle.

Fall 1 $f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) \geq y$

dann

$$a_{k+1} := a_k, \quad b_{k+1} := \frac{b_k + a_k}{2}$$

Fall 2 $f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) < y$

$$a_{k+1} := \frac{a_k+b_k}{2} \quad b_{k+1} := b_k$$

Dann ist immer der Fall

1. $a_k \leq a_{k+1} < b_{k+1} \leq b_k$
2. $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} = \dots = \frac{b_1 - a_1}{2^k}$
3. $f(a_{k+1}) \leq y \leq f(b_{k+1})$.

Nach Induktion.

erhalten wir 2 Folgen

$(a_k)_{k\geq 1}$ und $(b_k)_{k\geq 1}$ die

die Eigenschaften 1, 2, 3

erfüllen und

(a_k) mon $\nearrow$, (b_k) mon $\searrow$.

Da $\cancel{a_k \leq b_k}$

$$b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$$

$$\lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$$

$$= (b_1 - a_1) \lim \frac{1}{2^{k-1}} = 0$$

$\Rightarrow \lim b_k = \lim a_k =: c$

Da

$a = a_1 \leq a_2 \ldots < a_k < b_k \leq b_{k-1}$

$\ldots \leq b_1 = a_-$

auch der Grenzwert c ist zwischen a und

$a \leq c \leq b.$

$\lim a_k = c = \lim b_k$

$f(\lim a_k) = f(c) = f(\lim b_k)$

$\overrightarrow{\text{stetigkeit von } f}$ $\quad \parallel$

$\lim (f(a_k)) = f(c) = \lim (f(b_k))$

Aus (3)

$f(a_{k+1}) < y$

$\Rightarrow \lim f(a_{k+1}) \leq y$

$y \leq f(b_k)$

$\Rightarrow y \leq \lim f(b_{k+1})$

$\Rightarrow \lim f(a_k) \leq y \leq \lim (f(b_k))$

$$\begin{array}{ccccc} \lim f(a_k) & \leq & y & \leq & \lim (f(b_k)) \\ \parallel & & & & \parallel \\ f(c) & \leq & y & \leq & f(c) \end{array}$$

$\Rightarrow y = f(c)$

$\blacksquare$.

Kor Existenz einer Nullstelle

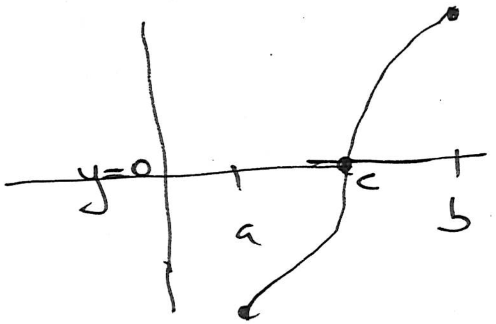
Sei f stetig.

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

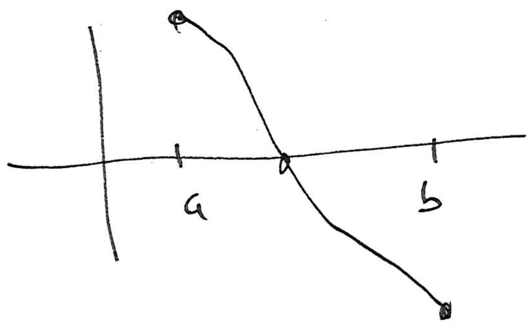
Falls $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

dann $\exists\, c \in (a, b)$ mit

$f(c) = 0$.



$f(c) = y = 0$.



Kor 2 Sei $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$

mit $a_n \neq 0$, n ungerade

Dann besitzt P mindestens

eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Bmk. Nicht Korrekt

falls $n =$ gerade.

zB. $P(x) = x^2 + 1$

hat 2 Komplex Nullstellen

$\pm i$, kein reelle Nullstelle

Kor Jede $n \times n$ Matrix mit reellen Koeffizienten und n = ungerade hat mindestens einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$.

§3.4 Der Min-Max Satz

Defn Ein Interval $I \subset \mathbb{R}$ ist **kompakt** falls es von der Form $I = [a, b]$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ ist

6

Satz (Min-Max Satz).

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf kompakte Interval $[a, b]$. Dann gibt es $u \in [a, b]$, $v \in [a, b]$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v)$$

$\forall x \in [a, b]$.

Insbesondere $f([a, b])$ ist beschränkt

d.h.

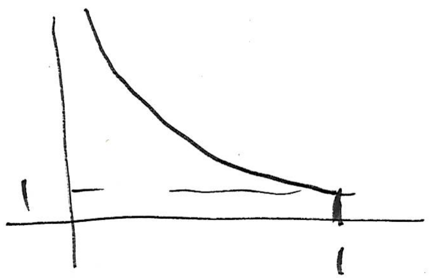
$$f(u) = \inf \{ f(x) \mid x \in I \}$$
$$f(v) = \sup \{ f(x) \mid x \in I \}$$

Bmk.

$I = (0, 1]$

$f(x) = \frac{1}{x}$

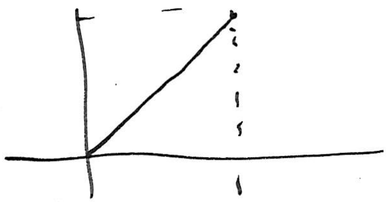
kein max!



$I = [0, 1)$

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ kein max

$x \longrightarrow x$



$f: [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$

kein Max!

Beweis **(Min-Max Satz)**

① $f([a,b])$ ist beschränkt

Beweis ① Falls nicht, so gibt es $\forall n \in \mathbb{N}$ ein $t_n \in [a,b]$ mit $f(t_n) > n$

Da $t_n \in [a,b]$, $(t_n)_{n\geq 1}$ ist beschrän

Nach Bolzano-Weierstrass hat $(t_n)_{n\geq 1}$ eine konv. Teilfolge

$(t_{\ell(n)})_{n\geq 1}$

sei $\lim(t_{\ell(n)}) = x_0$

Da, $a \leq t_n \leq b$,

$a \leq t_{\ell(n)} \leq b$

und damit folgt dass

$a \leq \lim t_{\ell(n)} \leq b$

$\Rightarrow a \leq x_0 \leq b$.

Aus stetigkeit von f

folgt dass

$$\lim(f(t_{\ell(n)})) = f(\lim(t_{\ell(n)})) = f(x_0).$$

Insbesondere

die Folge $f(t_{\ell(n)})$

ist beschränkt

Das ist ein Wiederspruch.

$f(t_{\ell(n)}) \geq \ell(n)$

d.h $f(t_{\ell(n)})$ ist nicht

beschronkt $\lightning$.

$\Longrightarrow f([a,b])$ ist beschränkt

Rest: Übung.

Kor Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $I = [a, b]$ kompakt

Dann $\text{Bild} f = f([a,b])$
$= \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$

ist auch ein kompakte Interval $J = \text{Bild} f = [f(u), f(v)]$
$= [\min f, \max f]$

§ 3.5 Der Satz über die Umkehrabbildung.

Satz Sei I ein Interval $f: I \to \mathbb{R}$ stetig streng monotone wachsend (falle

Dann ist das Bild von $f = f(I) =: J$ ist ein Interval und die Umkehr (Inverse) funktion

$f^{-1}: J \to I$ ist stetig und streng monotone wachsend (fallend)

Beweis (1) f ist injektive.-

Da f streng monotone wachsend ist, falls $x \neq y$ dann ist $f(x) \neq f(y)$

Falls $x \neq y$ dann entweder $x < y$ (oder $x > y$)

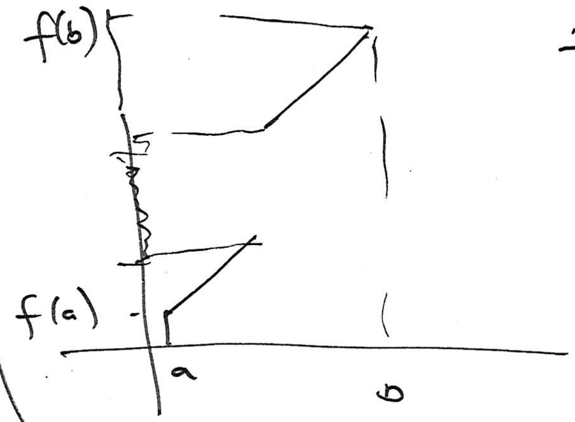
Dann $f(x) < f(y)$

(2) f surjektive.

Sei $c = f(a)$, $d = f(b)$

Da $a \neq b$, $c \neq d$

sei $y \in [c, d]$, Nach ZWS $\exists$ $x \in [a, b]$ s.d. $f(x) = y$ d.h.



falls f nicht stetig ist, dann f muss nicht surjektive sein!

$f: [a, b] \to [c, d]$ ist surjektive

$f^{-1}: [c, d] \to [a, b]$ existiert

(3) f^{-1} ist streng mon. wachsend

(4) f^{-1} ist stetig.

Übung.

Bmk Der Analog Satz gilt für jedes Interval auf für offene und unendliche Intervalle.

Als Folgerungen des Umkehrsatzes studieren wir die Umkehr Funk.

von $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$

$$x \mapsto x^n$$

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Bsp. Sei $n \geq 1$

Dann ist

$$f : [0,\infty) \to [0,\infty)$$

$$x \mapsto x^n$$

streng mon. wachsend surjektive, stetig.

Nach der Umkehrsatz existiert eine stetige streng mon. wach. Umkehr Funktion

$$f^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$$

$$x \to x^{1/n}$$

genannt die n-te Wurzel.

Um die **streng Monotonie** der Funktion $x \longmapsto x^n$ zu sehen: Sei $x, y > 0$

$y > x \Rightarrow y - x > 0$

$$f(y) - f(x) = y^n - x^n$$

$$\underbrace{= \underbrace{(y-x)}_{>0} \underbrace{(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1})}_{>0}}_{>0}$$

$\Rightarrow f(y) > f(x)$

$\Rightarrow f$ ist streng mon. wachsend.

f ist surjektiv

Übung (Seite 6)

f ist stetig.

Da f ein poly. ist.

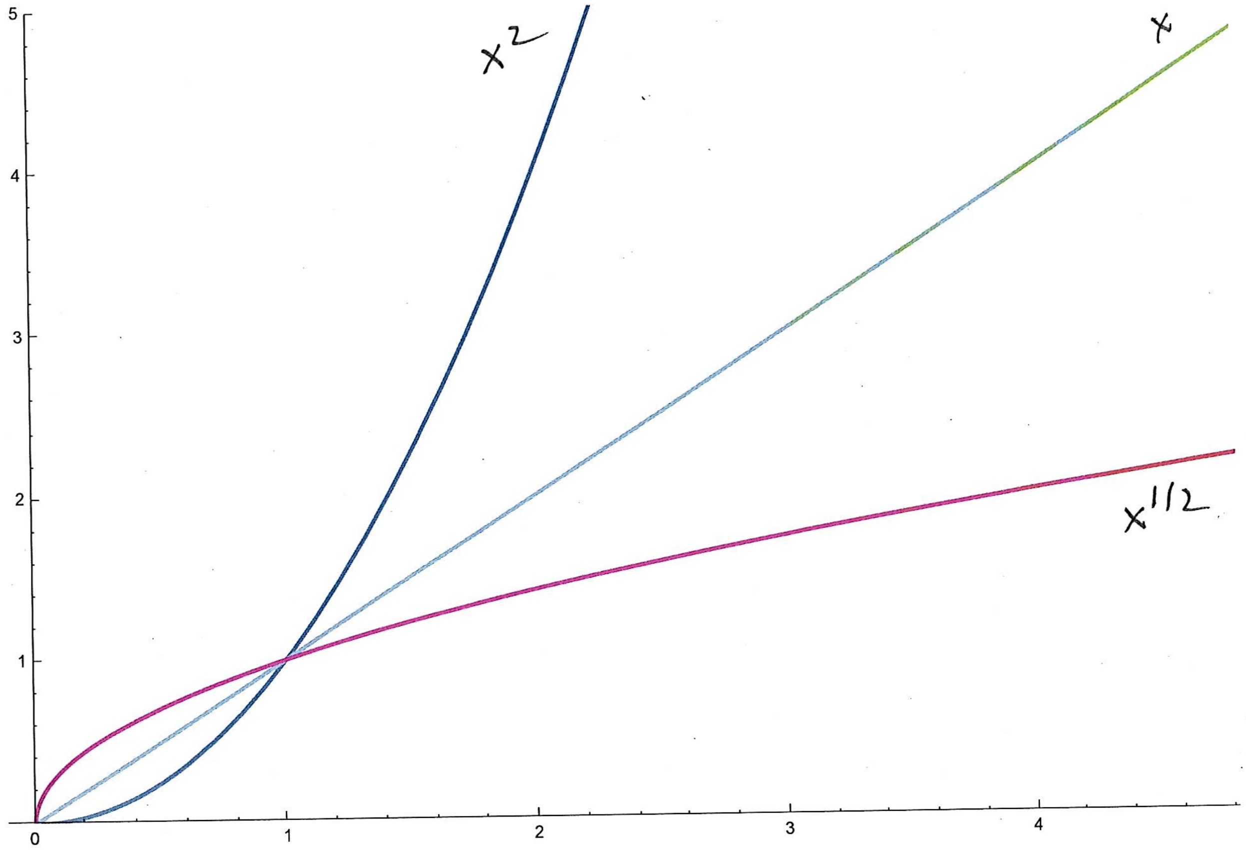
$\Rightarrow$ Nach Umkehrabbildungsatz existiert f^{-1} und ist f^{-1} stetig.

$$f^{-1}: [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

$$f^{-1}(x) = x^{1/n}$$

```
In[3]:= Plot[{x^2, , x, x^{1/2}}, {x, 0, 5}, PlotRange → {0, 5}]
```

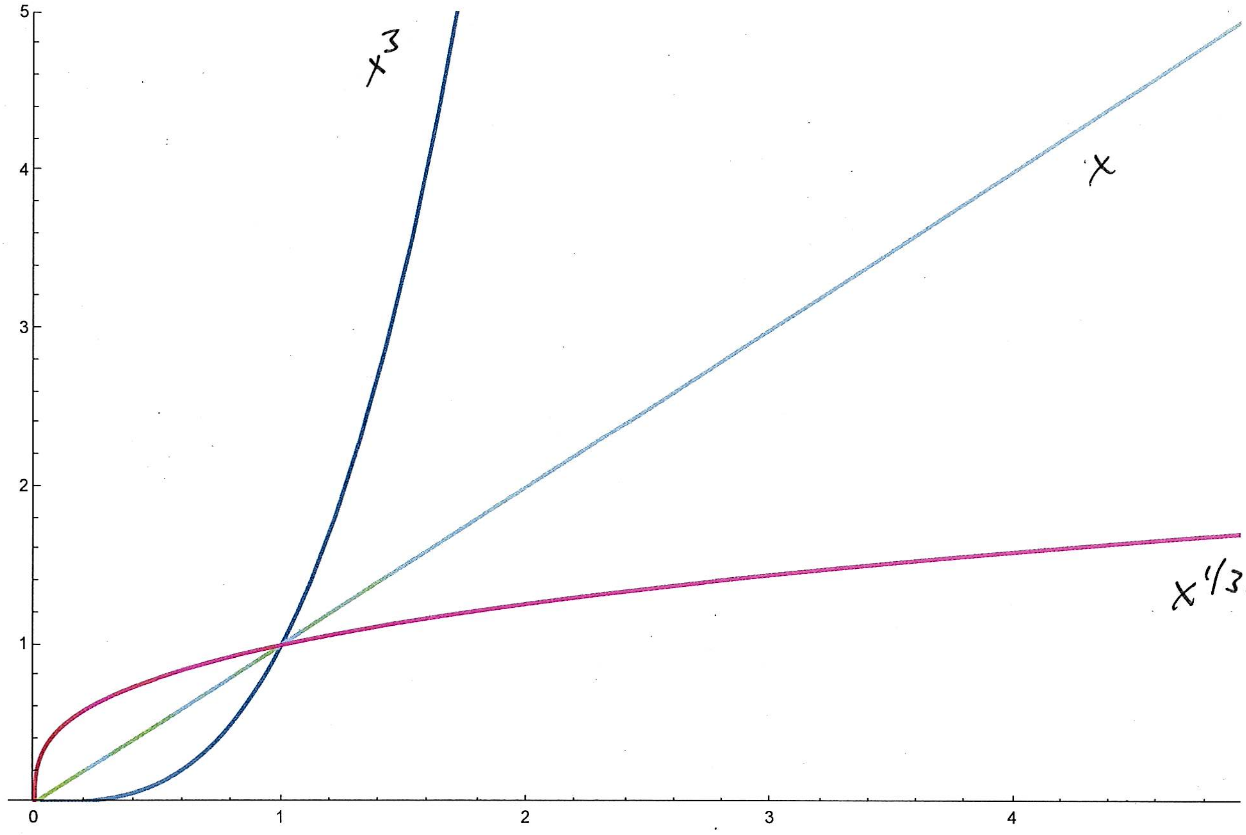
Out[3]=



14

In[4]:=
```
Plot[{x^3, , x, x^{1 / 3}}, {x, 0, 5}, PlotRange → {0, 5}]
```

Out[4]=



§ 3.6. Die reelle Exponential Funktion.

Satz $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist streng mon. wachsend, stetig und surjektive. Die Umkehrfunktion von $\exp x$ ist auch streng mon. wachsend und stetig

Die Umkehrfunktion von exp wird mit $\ln$ bezeichnet. $\ln$ heisst der natürliche logarithmus

$$\exp^{-1} = \ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}.$$
$$x \mapsto \ln x$$

Beweis. $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

① $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) > 0$

Beweis ①. Falls $x > 0$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \geq 1 > 0$$

$\exp(0) = 1$.

$\exp(x) \geq 1 \quad \forall x \geq 0$.

wegen $(\exp a)(\exp b) = \exp(a+b)$

mit $a = x$, $b = -x$

$$\exp(x-x) = \exp(0) = 1$$
$$= (\exp x)(\exp(-x))\,.$$

$$\Rightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp x} > 0$$

damit $\exp x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

② exp ist streng mon. wachsend

d.h $\forall x > y$, $\exp x > \exp y$

Beweis ② Sei $x > y$

Dann $x - y > 0$

$$\Rightarrow \exp(x-y) > 1$$

$$\exp(x) = \exp(x - y + y)$$
$$= \underbrace{\exp(x-y)}_{>1} \exp(y)\,.$$

$$\Rightarrow \exp(x) > \exp(y)$$

③ surjektive:

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp(1) = e$, $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \geq 1}$ ist mon. wachsende Folge

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + 1 = 2\,.$$

somit $e > 2$.

Daraus folgt dass

$$\exp(n) = e^n > 2^n$$
$$\exp(-n) = \frac{1}{e^n} = e^{-n} \leq 2^{-n}.$$

Noch zws

$$[2^{-n}, 2^n] \subset \exp([-n,n])$$

$$(0,\infty) = \bigcup_{n\geq 1} [2^{-n}, 2^n]$$

$$\subset \exp\Big(\bigcup_{n\geq 1}[-n,n]\Big)$$

$$= \exp(-\infty,\infty) \subset (0,\infty)$$

Daraus folgt dass

$$\exp(-\infty,\infty) = \exp(\mathbb{R})$$

$$= (0,\infty).$$